

**SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1999-2000**

Ermanno Lanconelli

**UN TEOREMA DI TIPO LIOUVILLE
PER SUB-LAPLACIANI**

16 maggio 2000

Tecnoprint - Bologna 2000

Riassunto. In questa nota presentiamo un teorema di tipo Liouville per operatori ipoellittici del secondo ordine in \mathbb{R}^N , invarianti rispetto alle dilatazioni e alle traslazioni a sinistra di un gruppo di Lie omogeneo, stratificato e nilpotente. La dimostrazione è del tutto elementare, e si basa sull'uso di formule di rappresentazione che generalizzano, da un lato, la classica formula di media di Gauss per le funzioni armoniche, dall'altro i classici operatori di regolarizzazione di Friedrich

Abstract. We show some Liouville-type theorems for real sub-laplacians. The proof is quite elementary and relies on representation formulas involving mean value operators and Friedrichs mollifiers.

UN TEOREMA DI TIPO LIOUVILLE PER SUB-LAPLACIANI

E. LANCONELLI

Risultati ottenuti in collaborazione con A. Bonfiglioli.

1. Il caso modello: l'operatore di Laplace. Il nostro risultato, nel caso dell'operatore di Laplace, si formula nel modo seguente.

TEOREMA 1. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\Delta u = p \text{ e } u \geq q \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ove p e q sono polinomi. Allora u è un polinomio. Inoltre

$$\text{grado } u \leq \max\{2 + \text{grado } p, \text{grado } q\}$$

Questo teorema contiene come caso particolare la seguente generalizzazione della classica proprietà di Liouville delle funzioni armoniche.

COROLLARIO 2. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\Delta u = k \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ove k è costante. Supponiamo che esista $C > 0$ tale che

$$u(x) \geq -C(1 + |x|^2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Allora

$$(1.1) \quad u(x) = a + \langle \alpha, x \rangle + \langle Ax, x \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

con $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$ e A matrice $N \times N$ tale che $2 \operatorname{tr} A = k$. In particolare se $k = C = 0$ allora $u \equiv a$.

Dimostrazione. Per il Teorema 1 u è un polinomio di grado ≤ 2 che può quindi scriversi come in (1.1). Di conseguenza

$$k = \Delta u(x) = \Delta(\langle Ax, x \rangle) = 2 \operatorname{tr} A.$$

In particolare, se $u \geq 0$ e $k = 0$, dovrà essere $A \geq 0$ e $\operatorname{tr} A = 0$. Quindi $A = 0$. Dalla positività di u segue ora che anche $\alpha = 0$.

Il Teorema 1 è conseguenza immediata dei due lemmi seguenti.

LEMMA 1.1. *Se u verifica le ipotesi del Teorema 1 allora*

$$(1.2) \quad u(x) = O(|x|^n) \quad \text{per} \quad |x| \rightarrow \infty$$

con

$$n = \max\{2 + \text{grado } p, \text{grado } q\}.$$

LEMMA 1.2. Se $u(x) = O(|x|^n)$ per $|x| \rightarrow \infty$ e se Δu è un polinomio, allora u è un polinomio.

Dimostreremo i Lemmi 1.1 e 1.2 utilizzando la seguente formula di rappresentazione per funzioni di classe C^2 :

$$(1.3) \quad u(x) = M_r(u)(x) - N_r(\Delta u)(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, r > 0,$$

dove

$$M_r(u)(x) = \int_{D(x,r)} u(y) dy,$$

$$N_r(w)(x) = \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^N \left(\int_{D(0,\rho)} w(y) (\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho)) dy \right) d\rho,$$

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^N / |x - y| < r\}$$

e $\Gamma(x) = \Gamma(|x|)$ è la soluzione fondamentale di $-\Delta$ con polo in 0.

Se $\Delta u = 0$ allora $N_r(\Delta u) = 0$ e la (1.3) diventa la classica formula di media di Gauss per le funzioni armoniche.

Se $\Delta u = p$ e p è un polinomio di grado m allora

$$\begin{aligned} N_r(\Delta u)(x) &= N_r(p)(x) \\ &= \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^N \left(\int_{D(0,\rho)} (\Gamma(x-y) - \Gamma(\rho)) \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha p)(x) (x-y) dy \right) d\rho, \end{aligned}$$

e quindi

$$(1.4) \quad N_r(\Delta u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} p^{(\alpha)}(x) r^{|\alpha|+2},$$

ove $p^{(\alpha)}(x) = C_{\alpha,N} (D^\alpha p)(x)$ e

$$C_{\alpha,N} = \frac{N}{\alpha!(N+2)} \int_{D(0,r)} z^\alpha (\Gamma(z) - \Gamma(1)) dz.$$

Pertanto, se il laplaciano di u è un polinomio p di grado m ,

$$(1.5) \quad u(x) = M_r(u)(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} p^{(\alpha)}(x) r^{|\alpha|+2},$$

Sia ora $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\text{supp } \phi \subset]0, 1[$ e $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Posto $\phi_\varepsilon(r) = \frac{1}{\varepsilon} \phi(\frac{r}{\varepsilon})$, moltiplichiamo entrambi i membri di (1.5) per $\phi_\varepsilon(r)$ e integriamo in r . Si ottiene

$$u(x) = \int_0^\infty \phi_\varepsilon(r) M_r(u)(x) dr - \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(\phi) p^{(\alpha)}(x) \varepsilon^{|\alpha|+2},$$

ove $C_\alpha(\phi) = \int_0^\infty r^{|\alpha|+2} \phi(r) dr$.

D'altra parte, sostituendo a M_r la sua espressione, dopo uno scambio di integrazione si ottiene

$$\int_0^\infty \phi_\varepsilon(r) M_r(u)(x) dr = \int_{\mathbb{R}^N} u(y) \Phi_\varepsilon(x-y) dy$$

ove $\Phi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-N} \Phi(\frac{z}{\varepsilon})$ e

$$\Phi(z) = \frac{1}{\omega_N} \int_{|z|}^\infty \frac{\phi(r)}{r^N} dr$$

Osserviamo esplicitamente che Φ è una funzione di classe C^∞ in \mathbb{R}^N , con supporto compatto e integrale uguale a 1.

In definitiva abbiamo:

$$(1.6) \quad u(x) = u * \Phi(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha(\phi) p^{(\alpha)}(x) \varepsilon^{|\alpha|+2},$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.1. Sostituendo u con $u - p$ possiamo supporre $u \geq 0$. Sotto questa ipotesi occorre dimostrare la (1.2) con $r = 2 + m$, ove m è il grado di p . Prendendo $r = |x|$ nella (1.5), si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) &= (M_{|x|} u)(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} p^{(\alpha)}(x) |x|^{|\alpha|+2} \\ &\leq 2^N (M_{2|x|} u)(0) + \sum_{|\alpha| \leq m} |p^{(\alpha)}(x)| |x|^{|\alpha|+2} \\ &= 2^N \left(u(0) + \sum_{|\alpha| \leq m} 2^{|\alpha|+2} |p^{(\alpha)}(0)| |x|^{|\alpha|+2} \right) + \sum_{|\alpha| \leq m} |p^{(\alpha)}(x)| |x|^{|\alpha|+2}. \end{aligned}$$

Da questo segue l'asserto in quanto $p(\alpha)$ è un polinomio di grado $m - |\alpha|$.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.2. Utilizziamo la formula (1.6). Poiché il secondo termine al suo secondo membro è un polinomio in x di grado $\leq m$, per ogni multi-indice β di altezza $> m$, si ha

$$\begin{aligned} D^\beta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u(y) D_x^\beta \Phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \frac{dy}{\varepsilon^N} \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^N} u(y) (D^\beta \Phi)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \frac{dy}{\varepsilon^{N+|\beta|}} \\ &= \frac{(-1)^{|\beta|}}{\varepsilon^{|\beta|}} \int_{D(0,1)} u(x - \varepsilon y) (D^\beta \Phi)(z) dz. \end{aligned}$$

Di conseguenza, essendo $u(y) = O(|y|^n)$ per $|y| \rightarrow \infty$,

$$|D^\beta u(x)| \leq C(\beta, \Phi) \frac{1 + (|x| + \varepsilon)^n}{\varepsilon^{|\beta|}}.$$

Da questa, se $|\beta| > n$, per $\varepsilon \rightarrow \infty$, si ottiene $D^\beta u(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Quindi u è un polinomio (di grado $\leq \max\{m, n\}$).

2. Il caso dei sub-laplaciani. In \mathbb{R}^N consideriamo l'operatore

$$(2.1) \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^p X_j^2$$

dove gli X_j sono operatori differenziali del primo ordine verificanti la condizione di Hörmander di ipoellitticità

$$(2.2) \quad \text{rank Lie } [X_1, \dots, X_p] = N$$

Supponiamo che \mathcal{L} possa scriversi in forma di divergenza, i.e.

$$(2.3) \quad \mathcal{L}u(x) = \text{div}[A(x) \cdot \nabla u(x)]$$

dove $A(x)$ è una matrice $N \times N$ semi-definita positiva.

Supponiamo inoltre che \mathbb{R}^N si possa munire di una struttura di gruppo di Lie omogeneo (\mathbb{R}^N, \circ) , nilpotente e stratificato, e tale che: (i) i campi X_j siano invarianti per le traslazioni a sinistra del gruppo; (ii) il sistema $\{X_1, \dots, X_m\}$ sia una base del primo strato dell'algebra di Lie di (\mathbb{R}^N, \circ) .

Sotto queste ipotesi l'operatore \mathcal{L} si chiama *sub-laplaciano* (o *laplaciano sub-ellittico*) sul gruppo (\mathbb{R}^N, \circ) . Poichè quest'ultimo è omogeneo, esiste una famiglia di dilatazioni $\{\delta_r\}_r$ tali che

$$\delta_r(x \circ y) = (\delta_r x) \circ (\delta_r y) \quad \forall r > 0, \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Le dilatazioni δ_r operano su \mathbb{R}^N nel modo seguente:

$$\delta_r : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) \mapsto \delta_r(x) = (r x^{(1)}, r^2 x^{(2)}, \dots, r^m x^{(m)})$$

ove $r > 0$, m è un intero positivo chiamato *passo* del gruppo e, per ogni $j = 1, \dots, m$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^{N_j}$ con N_j tale che $N = \sum_{j=1}^m N_j$. Il numero intero positivo

$$Q := \sum_{j=1}^m j N_j$$

è chiamato *dimensione omogenea* di (\mathbb{R}^N, \circ) .

Gli operatori differenziali X_j sono invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra del gruppo, e sono omogenei di grado uno rispetto alle dilatazioni δ_r .

La misura di Lebesgue è invariante per le traslazioni a destra e a sinistra di

(\mathbb{R}^N, \circ)

Grazie ad un notevole risultato di Gallardo [2], ad ogni sub-laplaciano \mathcal{L} si può associare una norma omogenea $\|\cdot\|$ che consente di scrivere la soluzione fondamentale Γ di \mathcal{L} nella forma seguente:

$$(2.4) \quad \Gamma(x, y) = C_Q \|x^{-1} \circ y\|^{2-Q}$$

ove C_Q è un'opportuna costante positiva. Ricordiamo che una norma omogenea su \mathbb{R}^N è una funzione

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty[$$

con le seguenti proprietà

- (i) $\|\cdot\| \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C(\mathbb{R}^N)$
- (ii) $\|\delta_r(x)\| = r\|x\| \quad \forall r > 0$
- (iii) $\|x^{-1}\| = \|x\|$
- (iv) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Esempi. Il classico operatore di Laplace è un sub-laplaciano rispetto al gruppo euclideo.

Il laplaciano di Kohn in \mathbb{R}^{2n+1}

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} := \sum_{j=1}^n (X_j^2 + Y_j^2)$$

con $X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t$ e $Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$, è un sub-laplaciano sul gruppo di Heisenberg \mathbb{H}_n .

Un altro esempio di sub-laplaciano è il seguente

$$(2.5) \quad \mathcal{L} = \partial_{x_1}^2 + (x_1\partial_{x_2} + \partial_{x_3})^2.$$

La struttura di gruppo omogeneo relativa a questo operatore è la stessa dell'operatore di Kolmogorov determinata in [LP].

Sub-laplaciani in dimensioni arbitrariamente elevate si possono costruire a partire da un generico operatore somma di quadrati di Hörmander mediante il cosiddetto procedimento di *lifting* di Rothschild e Stein. L'operatore \mathcal{L} in (2.5) si ottiene precisamente con questo metodo a partire dall'operatore di Grushin

$$\partial_{x_1}^2 + (x_1\partial_{x_2})^2.$$

Questo operatore, pur verificando l'ipotesi di ipoellitticità di Hörmander, *non* è un sub-laplaciano in \mathbb{R}^2 .

Una funzione $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ si dice δ_r -omogenea di grado m se

$$u(\delta_r x) = r^m u(x)$$

per ogni $r > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Se indichiamo con $m(i)$ il δ_r -grado della funzione $(x_1, \dots, x_N) \rightarrow x_i$, il δ_r -grado della funzione $(x_1, \dots, x_N) \rightarrow x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N}$, è

$$|(\alpha_1, \dots, \alpha_N)|_{\mathcal{L}} := \alpha_1 m(1) + \dots + \alpha_N m(N).$$

Infine, se $p(x) = \sum a_\alpha x^\alpha$ è una funzione polinomiale, poniamo

$$\text{grado}_{\mathcal{L}}(p) = \max_{\alpha} |\alpha|_{\mathcal{L}}.$$

Poichè \mathcal{L} è δ_r -omogeneo di grado 2, e poichè i suoi coefficienti sono funzioni polinomiali, se u è un polinomio di \mathcal{L} -grado $m+2$, allora $\mathcal{L}u$ è un polinomio di \mathcal{L} -grado m . Il nostro teorema di tipo Liouville afferma che vale anche il viceversa, purchè u sia dominata dal basso da un polinomio.

TEOREMA 3. *Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\mathcal{L}u = p \text{ e } u \geq q \text{ in } \mathbb{R}^N,$$

ove p e q sono polinomi. Allora u è un polinomio. Inoltre

$$\text{grado}_{\mathcal{L}} u \leq \max\{2 + \text{grado}_{\mathcal{L}} p, \text{grado}_{\mathcal{L}} q\}$$

La dimostrazione di questo teorema si ottiene con la stessa tecnica applicata nel caso di $\mathcal{L} = \Delta$, utilizzando una formula di rappresentazione per le soluzioni di $\mathcal{L}u = p$ analoga alla (1.6). Il punto di partenza è la seguente formula di media sugli insiemi di livello della soluzione fondamentale di \mathcal{L} : per ogni funzione reale u di classe C^2 su \mathbb{R}^N risulta

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u(x) = & \int_{\Gamma(x,y)=1/\rho} u(y) \frac{A(y) \nabla_y \Gamma(x,y) \cdot \nabla_y \Gamma(x,y)}{|\nabla_y \Gamma(x,y)|} dH_{N-1}(y) \\ & - \int_{\Gamma(x,y)>1/\rho} \mathcal{L}u(y) \cdot \left(\Gamma(x,y) - \frac{1}{\rho} \right) dy \end{aligned}$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri per ρ^n , con $n \neq -1$, e poi integriamo in $\rho \in [r/2, r]$, otteniamo

$$(2.7) \quad \begin{aligned} u(x) = & \frac{n+1}{r^{n+1}} \left\{ \int_{2/r > \Gamma(x,y) > 1/r} u(y) \frac{A(y) \nabla_y \Gamma(x,y) \cdot \nabla_y \Gamma(x,y)}{\Gamma^{n+2}(x,y)} dy \right. \\ & \left. - \int_{r/2}^r \rho^n \left[\int_{\Gamma(x,y) > 1/\rho} \mathcal{L}u(y) \cdot \left(\Gamma(x,y) - \frac{1}{\rho} \right) dy \right] d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $\mathcal{L}u = p$, con p polinomio di \mathcal{L} -grado m . Prendiamo una funzione reale $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\text{supp } \varphi \subseteq [1, 2]$, $\varphi \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Moltiplicando

entrambi i membri di (2.7) per $\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(r))$, e integrando in $r \in [0, \infty]$, dopo alcune semplici trasformazioni, si ottiene:

$$u(x) = u * \Phi_{\varepsilon}(x) + \sum_{|\alpha| \leq L} p(\alpha)(x) \varepsilon^{2+|\alpha|L},$$

ove $*$ indica la convoluzione nel senso del gruppo (\mathbb{R}^N, \circ) , $\Phi_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-Q} \Phi(\delta_{\frac{1}{\varepsilon}}(x))$, $\Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, e $p^{(\alpha)}$ è un polinomio avente \mathcal{L} -grado $= m - |\alpha|_{\mathcal{L}}$.

Il Teorema 3 si dimostra utilizzando questa formula, mediante opportuni adattamenti della tecnica usata nel precedente paragrafo.

Confronto con risultati precedenti. Se nel Teorema 3 si sostituisce l'ipotesi $u \geq p$ con la seguente

$$|u| \leq p,$$

si ottiene un risultato dimostrato da Korany e Stanton [3], nel caso del laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg, e da Geller [1] nel caso di un arbitrario operatore ipoellittico e omogeneo, invariante rispetto alle traslazioni a sinistra di un gruppo stratificato e nilpotente. Recentemente Xuebo [5] ha esteso il risultato di Geller agli operatori ipoellittici, omogenei rispetto ad un gruppo di dilatazioni in \mathbb{R}^N , non necessariamente invarianti rispetto alle traslazioni di un gruppo di Lie. Tutti questi lavori utilizzano tecniche di analisi funzionale, a volte abbastanza elevate. Il nostro metodo si differenzia da tutti questi, ed è diretto e del tutto elementare. Vogliamo infine citare un elegante risultato di Rothschild [4] sulla equivalenza della ipoellitticità e della proprietà di Liouville per gli operatori invarianti su un gruppo di Lie nilpotente e stratificato.

3. Un esempio di applicazione. Sia Δ_{H_n} il laplaciano di Kohn sul gruppo di Heisenberg. Nella ricerca delle trasformazioni differenziabili che commutano con Δ_{H_n} , si è condotti ai seguenti problemi.

(P1) Determinare le funzioni ψ di classe C^2 su \mathbb{R}^N tali che

$$\Delta_{H_n} \psi = 0, \quad |\nabla_{H_n} \psi|^2 = 1.$$

(P2) Determinare le funzioni ψ di classe C^2 su \mathbb{R}^N tali che

$$\Delta_{H_n} \psi = 0, \quad |\nabla_{H_n} \psi|^2 = |z|^2.$$

Se poniamo $u = \frac{\psi^2}{2}$, da (P1) si trae

$$\Delta_{H_n} u = 1, \quad \text{con } u \geq 0$$

mentre da (P2)

$$\Delta_{H_n} u = |z|^2, \quad \text{con } u \geq 0.$$

(indichiamo con (z, t) il punto di \mathbb{R}^{2n+1} , con $z \in \mathbb{R}^{2n}$ e $t \in \mathbb{R}$). Per il Teorema 3, nel primo caso u deve essere un polinomio di Δ_{H_n} -grado ≤ 2 , e quindi un polinomio del tipo $u(z, t) = q(z) + \alpha t$, ove q è un polinomio di grado euclideo

2 e α è una costante reale. D'altra parte, dovendo essere $u \geq 0$, dovrà essere $\alpha = 0$. Quindi

$$u(z, t) = q(z).$$

Nel caso del problema (P2), u deve invece essere un polinomio non negativo avente Δ_{H_n} -grado ≤ 4 .

Utilizzando questi risultati si prova agevolmente che le uniche trasformazioni due volte differenziabili che commutano col laplaciano di Kohn, sono le traslazioni a sinistra sul gruppo di Heisenberg, le rotazioni euclidee intorno all'asse t , le simmetrie rispetto all'iperpiano $t = 0$, nonché, ovviamente, tutte le composizioni di queste trasformazioni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] D. GELLER, *Liouville's theorem for homogeneous groups*, Comm.PDE, 15(1983), pp. 1665-1677.
- [2] L. GALLARDO, *Capacité, mouvement brownien et problème de l'épine de Lebesgue sur le groupes nilpotent*, Proc. Oberwolfach Conference on Probability measures on groups, Lectures Notes in Math., 1981.
- [3] A. KORANY E N. K. STANTON, *Liouville-type theorem for some complex hypoelliptic operators*, J. Functional An. 60(1985), 370-377.
- [4] P. ROTHSCHILD, *A remark on hypoellipticity of homogeneous invariant differential operators on nilpotent Lie groups*, Comm. PDE, 15(1983), pp. 1679-1682.
- [5] L. XUEBO, *Liouville theorem for homogeneous differential operators*, Comm.PDE, v. 22 (1997), pp. 1837-1848.